Correction du contrôle 3 de rattrapage

Solution de l'exercice 1. Pour la première expression, par la simple distributivité :

$$\begin{aligned} A_1 &= -3x(2-5x) \\ &= -3x \times 2 + (-3x) \times (-5x) \\ &= -6x + 15x^2. \end{aligned}$$

En utilisant les identités remarquables $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour la deuxième expression, on obtient

$$\begin{aligned} A_2 &= (6x-2)^2 + (2x+1)^2 \\ &= (6x)^2 - 2 \times 6x \times 2 + 2^2 + (2x)^2 + 2 \times 2x + 1^2 \\ &= 36x^2 - 24x + 4 + 4x^2 + 4x + 1 \\ &= 40x^2 - 20x + 5. \end{aligned}$$

Pour la troisième expression on utilise d'une part la double distributivité et d'autre part la simple distributivité :

$$\begin{aligned} A_3 &= (3x+7)(x-6) + 2x(4-x) \\ &= 3x \times x + 3x \times (-6) + 7x + 7 \times (-6) + 2x \times 4 + 2x \times (-x) \\ &= 3x^2 - 18x + 7x - 42 + 8x - 2x^2 \\ &= x^2 - 3x - 42. \end{aligned}$$

Enfin pour la quatrième expression on reconnaît l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned} A_4 &= (7x-5)(7x+5) \\ &= (7x)^2 - 5^2 \\ &= 49x^2 - 25. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2. Pour la première expression, on reconnaît l'identité remarquable $a - 2ab + b^2$ avec $a = 3$ et $b = 5$:

$$\begin{aligned} B_1 &= 9x^2 - 30x + 25 \\ &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2 \\ &= (3x-5)^2. \end{aligned}$$

Pour la deuxième expression, on repère la facteur commun $(x-2)$. Donc :

$$\begin{aligned} B_2 &= (x-2)(5x+6) - (2x+34)(x-2) \\ &= (x-2)\left(5x+6-(2x+34)\right) \\ &= (x-2)\left(5x+6-2x-34\right) \\ &= (x-2)\left(3x-28\right). \end{aligned}$$

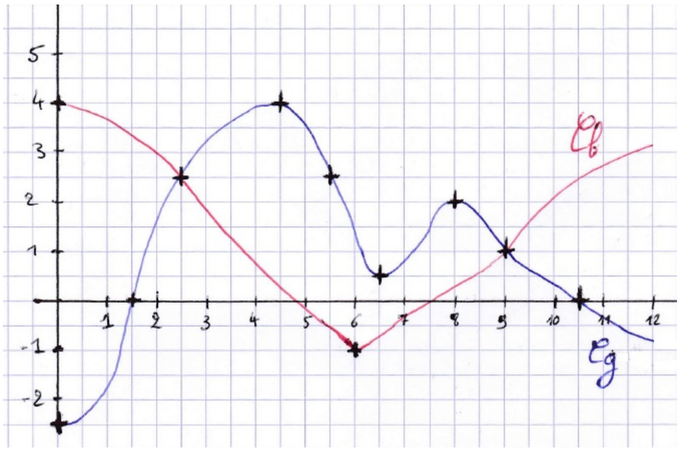
Pour la troisième expression, puisque 12 n'est pas un carré, on ne peut pas appliquer l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Par contre, on observe que $12x^2 = 6 \times 2 \times x \times x = 3 \times 2 \times 2 \times x \times x$ tandis que $36x = 6 \times 6 \times x = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times x$. Ainsi ces deux termes ont pour facteur commun $3 \times 2 \times 2 \times = 12x$. Donc

$$B_3 = 12x^2 - 36x = 12x \times x - 12x \times 3 = 12x(x-3).$$

Dans le quatrième terme, 49 et 16 sont des carrés, on peut donc appliquer l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, avec $a = 7$ et $b = 4$.

$$B_4 = 49x^2 - 16 = 7^2x^2 - 4^2 = (7x-4)(7x+4).$$

Solution de l'exercice 3.



1. L'ensemble des réels $x \in [0;12]$ solutions de l'équation $g(x) = 2,5$ est $\mathscr{S} = \{2,5;5,5\}$.
2. L'ensemble des réels $x \in [0;12]$ solutions de l'équation $g(x) > 0$ est $\mathscr{S} =]1,5;10,5[$.
3. L'ensemble des réels $x \in [0;12]$ solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est $\mathscr{S} = \{2,5;9\}$.
4. L'ensemble des réels $x \in [0;12]$ solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est $\mathscr{S} = [0;2,5] \cup [9;12]$.
5. D'après la question précédente, on sait que $f(x) - g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow x \in [0;2,5] \cup [9;12]$. Donc $f(x) - g(x)$ est positif sur $[0;2,5] \cup [9;12]$ et négatif ailleurs :

x	0		2,5		9		12
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Solution de l'exercice 4.

1. Soit x un réel. On commence par développer les deux côtés de l'égalité :

$$3(x-4) = 8\,(3x-1)$$
$$\Leftrightarrow 3x - 12 = 24x - 8.$$

Ensuite on rassemble les « x » d'un côté et les « non-x » de l'autre :

$$3x - 12 = 24x - 8$$
$$\Leftrightarrow -12 = 24x - 8 - 3x$$
$$\Leftrightarrow -12 = 21x - 8$$
$$\Leftrightarrow -12 + 8 = 21x$$
$$\Leftrightarrow -4 = 21x.$$

Enfin on divise par le coefficient devant x :

$$-4 = 21x \Leftrightarrow x = \frac{-4}{21}.$$

Cette fraction étant irréductible, on ne peut pas la simplifier. L'unique réel x solution de l'équation est donc $x = \frac{-4}{21}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, avec $a = 5x$ et $b = 2$, on factorise U :

$$U = 25x^2 - 20x + 4 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2 = (5x-2)^2.$$

Dans V, on repère que 3 est un facteur commun à 15 et 6 :

$$V = 15x - 6 = 3 \times 5x - 3 \times 2 = 3(5x-2).$$

3. Puisque $W = U + V$, en utilisant la question précédente, on obtient tout d'abord

$$W = (5x-2)^2 + 3(5x-2).$$

Puis on observe que $5x - 2$ est un facteur commun. On termine donc la factorisation de la façon suivante :

$$W = (5x-2)(5x-2+3) = (5x-2)(5x+1).$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 5x - 2 \geqslant 0 &\Leftrightarrow 5x \geqslant 2 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble solution est $\mathscr{S} = \left[\frac{2}{5}; +\infty\right[$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 5x + 1 \geqslant 0 &\Leftrightarrow 5x \geqslant -1 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{-1}{5}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble solution est $\mathscr{S} = \left[\frac{-1}{5}; +\infty\right[$.

6. On obtient grâce aux questions précédentes le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{5}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$5x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(5x-2)(5x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	